حل معادلات ضربه‌قوچ یک‌بعدی و دوبعدی بااستفاده‌از شارموج تغییریافته و مدل آشفتهٔ بالدوین-لوماکس*

حسین مهدیزاده[۱]

چکیده در این مقاله معادلات جریان ناپایای لزج در لوله‌های کشسان در حالت یک و دوبعدی، توسط یک روش بخش موج گودونف مدل‌سازی می‌گردند. مدل عددی ارائه‌شده در اینجا قادر است بااستفاده‌از یک روش شار موج تغییریافته جملات اصطکاک را در داخل تفاوت شارها در دو سلول مجاور روش حجم محدود قرار دهد و شارموج‌های مرتبط با آن را محاسبه نماید. برا ی لحاظ کردن عبارات اصطکاک در اینجا از مدل آشفتهٔ بالدوین-لوماکس استفاده می‌گردد. درابتدا روش عددی برای حل معادلات ضربه‌قوچ برای یک لولهٔ متصل به مخزن استفاده می‌شود و نتایج عددی حاصل با حل دقیق و همچنین روش خطوط مشخصات در دو حالت بدون اصطکاک و همچنین با درنظر گرفتن ترم‌های اصطکاک پایا مقایسه می‌گردد. سپس الگوریتم عددی موردنظر برای مدل نمودن جریان در دو لوله با عددهای رینولدز مختلف (Re=15800, Re=5800) که مرتبط با قطر لوله و سرعت متوسط می‌باشند، با درنظر گرفتن عبارات اصطکاک ناپایدار به‌کار رفته و نتایج عددی به‌دست آمده با نتایج آزمایشگاهی مقایسه می‌گردد. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که مدل عددی معرفی‌شده در حالت یک‌بعدی کاملاً بر حل دقیق منطبق است. همچنین در حالت دوبعدی و با لحاظ نمودن عبارات اصطکاک آشفته تطابق بسیار خوبی را با نتایج آزمایشگاهی برای هر دو محدوده عدد رینولدز، حتی برای اعداد کورانت نزدیک به یک دارا می‌باشد.

واژه‌های کلیدی ضربه‌قوچ; الگوریتم پخش موج; روش شار موج; الگوی بالدوین لوماکس.

Numerical Solution of the One- and Two-Dimensional Water Hammer Problems based on a Modified Flux-wave Approach and Baldwin-Lomax Turbulence Model

H. Mahdizadeh

Abstract *In this paper the two-dimensional unsteady flow within the elastic pipes is modelled based on a Godunov-type wave propagation algorithm. The numerical solver applied herein employs a modified flux-wave approach which mainly treats the friction source term within the flux-differencing of the finite volume neighboring cells to calculate the relevant flux-waves. In order to include the unsteady friction term the Baldwin-Lomax turbulence model is utilized. First, the method is examined to model the water hammer problem for a pipe connected to reservoir and the obtained numerical results are compared with either the exact solution or method of characteristic with both frictionless and steady friction terms. Then, the proposed scheme is employed to simulate the flow within two pipes with different Reynolds number (Re=15800, Re=5800) and the numerical simulations are validated with the available experimental data. It will be shown that for one-dimensional water hammer problem the defined numerical scheme gives the exact solutions. Additionally for the two-dimensional water hammer test cases and for the both given Reynolds number the numerical model containing turbulent friction terms provides very good agreement with existing experimental data even for the Courant number close to one.*

Key Words Water hammer problem, Wave propagation algorithm, Flux wave approach, Baldwin-Lomax method

---

★تاریخ دریافت مقاله ۹۵/۵/۱۹ و تاریخ پذیرش ۹٦/۱/۲۰آن می‌باشد. DOI: 10.22067/fum-mech.v29i1.58072

(۱) استادیار، گروه عمران، دانشکدهٔ فنی و مهندسی، دانشگاه بیرجند. hossein.mahdizadeh@birjand.ac.ir

مقدمه

حل مسائل جریان گذار در لوله‌ها از مسایل بسیار مهم در مهندسی عمران و مکانیک می‌باشد. یکی از متداول‌ترین انواع جریان‌ها گذار پدیدهٔ ضربه‌قوچ است که می‌تواند باعث تغییرات سریع فشار و ایجاد موج‌های ایستا در درون لوله گردد. حرکت موج‌های مذکور می‌تواند نهایتاً منجر به تغییرشکل ناگهانی لوله و تخریب اتصالات شیرها و پمپ‌های موجود در سیستم گردد. در سال‌های اخیر روش‌های مختلفی برای مدل‌سازی جریان لوله‌ها در حالت گذار در حالت یک‌بعدی و دوبعدی ارائه گردیده است که این روش‌ها به‌صورت جامع توسط گیدوا و همکاران [1] بررسی و مرور گردیده‌اند. به‌طور کلی معادلات ضربه قوچ را در حالت یک‌بعدی می‌توان با روش خطوط مشخصات، روش تفاضل محدود، و همچنین روش المان محدود حل نمود. روش خطوط مشخصات یک روش سریع و دقیق می‌باشد که به‌طور گسترده‌ای برای حل معادلات ضربه‌قوچ در حالت یک‌بعدی استفاده می‌گردد. از مزایای اصلی این روش سادگی در برنامه‌نویسی و سرعت بالای آن می‌باشد. سامانی و خیاطزاده [2] معادلهٔ ضربه‌قوچ را باوجود جملات اصطکاک پایدار بااستفاده‌از روش خطوط مشخصات حل نموده‌اند. از معایب اصلی روش خطوط مشخصات عدم دقت آن درصورت وجود سرعت بالای موج به‌خصوص در نقاط منقطع می‌باشد. چادوری و حسینی [3] معادلات ضربه‌قوچ را باروش تفاضل‌های محدود حل کردند. آنها دریافتند که روش تفاضل محدود مرتبه‌دوم نتایج بهتری نسبت به روش خطوط مشخصات مرتبه اول می‌دهد. در سال‌های اخیر توجه نسبتاً خوبی به حل معادلات ضربه‌قوچ بااستفاده‌از روش‌های حجم محدود گودونوف (Godunov) [4] شده است. روش‌های گدونوف یک راه حل صریح برای حل سیستم معادلات هذلولی می‌باشند که می‌توانند در حالت‌های بقایی و غیربقایی به‌خصوص برای حل معادلات اولر و آب‌های کم‌عمق استفاده گردند. این روش‌ها که به روش‌های تسخیر موج ایستا نیز (Shock Capturing Methods) معروف هستند به‌صورت نسبتاً کامل توسط لوک [5] و تورو [7 , 6] مرور گردیده‌اند. ژائو و گیدوا [8] روش‌های مرتبه اول و دوم حجم محدود صریح گودونوف را برای مسائل ضربه‌قوچ فرمول‌بندی و تحلیل کردند. آنها دریافتند که این روش به نتایج نسبتاً بهتری نسبت به خطوط مشخصات منجر می‌گردد. در دیگر کار ونگ و چانگ [9] یک روش مرتبه‌دوم یک‌بعدی را برای حل معادلات جریان ناپایا در لوله‌ها توسعه داده‌اند. برای صحت‌سنجی نتایج مدل آن را با حل دقیق و روش خطوط مشخصات مقایسه نموده‌اند. اخیراً برخی از روش‌های عددی برای مدل نمودن جریان گذار در لوله‌ها بااستفاده‌از عبارات اصطکاک ناپایدار بااستفاده‌از روش‌های حجم محدود و رانگ کوتای مرتبه‌بالا ارائه گردیده است. به‌عنوان مثال ژائو و گیدوا [8] مدل $k-\varepsilon$ را برای مدل‌سازی جریان گذار در لوله‌ها در حالت دوبعدی برای روش حجم محدود ارائه کرده‌اند. رییسی و همکاران [10] یک مدل درجه چهارم رانگ کوتا را برای حل معادله‌های ضربه‌قوچ در حالت دوبعدی معرفی نموده‌اند. برای لحاظ نمودن ترم‌های اصطکاک ناپایدار در حالت دوبعدی در روش آنها از مدل جریان آشفته $k-\omega$ استفاده شده است. در دیگر کار واهبا [11] به ارائهٔ یک روش عددی براساس الگوی رانگ کوتای مرتبه‌دوم مرکزی برای حل معادلات ضربه‌قوچ پرداخته است. برای درنظر گرفتن عبارت‌های جریان آشفته از مدل بالدوین-لوماکس استفاده گردیده است. در جهت بررسی نتایج در این کار روش عددی معرفی‌شده با حل آزمایشگاهی و دقیق مقایسه گردیده است.

هدف اصلی در مقالهٔ حاضر معرفی یک روش دقیق حجم محدود براساس الگوریتم بخش موج برای حل معادلات ضربه‌قوچ در حالت‌های یک‌بعدی و دوبعدی می‌باشد. برای محاسبهٔ جملات راست‌رونده و چپ‌رونده در الگوریتم پخش موج معرفی‌شده از روش شار موج استفاده می‌گردد. مدل شار موج موردنظر درواقع توسعهٔ روش شار موج تغییریافته برای معادلات

جریان ناپایا در لوله‌ها می‌باشد که در ابتدا برای حل معادلات آب‌های کم‌عمق در حالت یک‌بعدی و دوبعدی توسط مهدیزاده و همکاران [12, 13] معرفی گردیده است. مدل موردنظر یک مدل کاملاً خوش‌توازن (Well-Balanced) است که اثر عبارت‌های چشمه مانند اصطکاک را در داخل تفاضل دو سلول حجم محدود لحاظ می‌نماید. از طرف دیگر در مدل مذکور احتیاج به محاسبهٔ ماتریس ژاکوبی در هر گام زمانی نمی‌باشد و تنها از این ماتریس برای محاسبهٔ مقدار ویژه و بردارهای ویژه استفاده می‌گردد و به‌همین علت از سرعت بالاتری نسبت به مدل‌های عددی دیگر برخوردار می‌باشد. برای درنظر گرفتن ترم‌های اصطکاک ناپایدار در این مقاله از مدل جریان آشفتهٔ بالدوین–لوماکس بهره گرفته می‌شود. ادامهٔ این مقاله بدین صورت می‌باشد که درابتدا به معرفی معادلات ضربه‌قوچ پرداخته می‌شود سپس به توسعهٔ الگوی پخش موج و روش شار موج تغییریافته، با درنظر گرفتن عبارت‌های اصطکاک برای معادلات ضربه‌قوچ پرداخته می‌شود. درادامه الگوی آشفتهٔ بالدوین لوماکس بیان می‌شود و نهایتاً الگوی عددی معرفی‌شده برای چند مسئلهٔ جریان گذار در لوله‌ها به‌کار می‌رود و نتایج عددی به‌دست آمده با حل تحلیلی و آزمایشگاهی مقایسه می‌گردد.

معادلات ضربه‌قوچ در حالت دوبعدی. معادلات ضربه‌قوچ در حالت دوبعدی به‌صورت کلی زیر قابل بیان می‌باشد.

$$\begin{aligned}&\frac{\partial H}{\partial t}+V\frac{\partial H}{\partial x}+\frac{a^2}{g}\frac{\partial V}{\partial x}=0\\&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{1}{\rho r}\frac{\partial (r\tau_{rx})}{\partial r}\end{aligned} \qquad (۱)$$

در رابطهٔ (۱) H هد فشار (m)، a سرعت موج (m/s)، u سرعت جریان در هر مقطع از لوله (m/s)، V سرعت متوسط r فاصله از مرکز لوله (m/s)، ρ چگالی ($\mathrm{kg/m^3}$)، g شتاب گرانش ($\mathrm{m/s^2}$) و نهایتاً τ_{rx} تنش برشی ($\mathrm{N/m^2}$) می‌باشد که توسط معادلهٔ زیر محاسبه می‌گردد:

$$\tau_{rx}=\rho(\nu+\nu_t)\frac{\partial u}{\partial r}, \qquad (۲)$$

که در اینجا ν، لزجت دینامیک سیال(m^2/s) و ν_t لزجت گردابه‌ای (m^2/s) (Eddy Viscosity) می‌باشد که در حالت جریان آرام برابر صفر درنظر گرفته می‌شود و در حالت جریان آشفته از یک مدل مناسب جریان آشفته قابل‌محاسبه است. برای بیان معادلات ضربه‌قوچ در حالت یک‌بعدی با جملات اصطکاک پایدار تنها لازم است که در معادلهٔ (۱) عبارت سرعت در هر مقطع از لولهٔ u با سرعت متوسط V جایگزین گردد و به‌جای ترم $\frac{1}{\rho r}\frac{\partial (r\tau_{rx})}{\partial r}$ عبارت زیر در رابطهٔ اندازهٔ حرکت قرار گیرد [13]:

$$\frac{-fV|V|}{2D} \qquad (۳)$$

در رابطهٔ بالا D قطر لوله (m) و f ضریب اصطکاک مودی در حالت پایدار می‌باشد و توسط رابطهٔ سوامی–جین قابل بیان است [14].

$$f=\frac{0.25}{\left[log_{10}(\frac{\varepsilon}{3.7D}+\frac{5.74}{Re^{0.9}})\right]^2} \qquad (٤)$$

در رابطهٔ فوق ε زبری لوله و Re عدد رینولدز است که عبارت فوق تنها در محدودهٔ $4000 < Re \le 3\times10^8$ برای لوله‌های زبر قابل‌محاسبه است. همان‌طور که قبلاً نیز بیان گردید معادلات ضربه‌قوچ یک سیستم معادلات هذلولی می‌باشند و در معادلهٔ (۱) به‌صورت غیربقا بیان گردیده‌اند. با حذف

عبارات $V\dfrac{\partial H}{\partial x}$ و $u\dfrac{\partial u}{\partial x}$ که از لحاظ مقداری بسیار ناچیز می‌باشند می‌توان سیستم معادلات (۱) را در شکل بقایی و به‌صورت شکل زیر بیان نمود.

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{t}}+\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})\mathrm{x}=\boldsymbol{S} \qquad (۵)$$

که در اینجا،

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}H\\u\end{bmatrix},\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})=\begin{bmatrix}\dfrac{a^2}{g}V\\gH\end{bmatrix},\boldsymbol{S}=\begin{bmatrix}0\\\dfrac{1}{\rho r}\dfrac{\partial(r\tau_{rx})}{\partial r}\end{bmatrix}. \qquad (۶)$$

می‌باشد. در معادلات فوق $\boldsymbol{U}$ بردار مجهولات $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})$ بردار شار و نهایتاً $\boldsymbol{S}$ بردار جملات چشمه می‌باشد. ماتریس ژاکوبی و بردارهای ویژهٔ مرتبط با بردار شار، برای سیستم فوق به‌صورت زیر قابل بیان است.

$$\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{U})=\begin{bmatrix}0 & a^2/g\\ g & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{r}_1=\begin{bmatrix}1\\-g/a\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{r}_2=\begin{bmatrix}1\\g/a\end{bmatrix}. \qquad (۷)$$

در رابطهٔ بالا $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{U})$ ماتریس ژاکوبی و بردارهای $\boldsymbol{r}_1$ و $\boldsymbol{r}_2$ بردارهای ویژه برای ماتریس مذکور می‌باشند. شایان ذکر است که برای حالت دوبعدی معادلات ضربه‌قوچ، سرعت متوسط در هر گام زمانی می‌تواند توسط عبارت زیر محاسبه گردد.

$$V=\frac{\int_0^R u2\pi r dr}{\pi R^2}. \qquad (۸)$$

همان‌طور که قبلاً نیز بیان گردید برای حل سیستم معادلات ضربه‌قوچ در این مقاله از الگوریتم بخش موج و روش شار موج استفاده خواهد گردید که در ادامه به‌صورت کلی به بیان این روش‌ها پرداخته می‌گردد.

الگوریتم پخش موج برای حل سیستم معادلات هذلولی

روش پخش موج گودونوف برای اولین بار توسط لوک [5, 15] بیان گردید که به‌صورت کلی زیر قابل بیان می‌باشد.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_i^{n+1}=&\boldsymbol{U}_i^n-\frac{\Delta t}{\Delta x}(\boldsymbol{A}^+\Delta\boldsymbol{U}_{i-1/2}+\boldsymbol{A}^-\Delta\boldsymbol{U}_{i+1/2})\\&-\frac{\Delta t}{\Delta x}(\tilde{\boldsymbol{F}}_{i+1/2}^n-\tilde{\boldsymbol{F}}_{i-1/2}^n),\end{aligned} \qquad (۹)$$

که در آن $\boldsymbol{U}^{n+1}$ بردار مجهولات در گام زمانی $n+1$، و $\boldsymbol{A}^+\Delta\boldsymbol{U}_{i-1/2}$ و $\boldsymbol{A}^-\Delta\boldsymbol{U}_{i+1/2}$ به‌ترتیب موج‌های راست‌رونده و چپ‌رونده می‌باشند که به‌صورت رابطهٔ (۱۰) قابل‌محاسبه هستند.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^-\Delta\boldsymbol{U}_{i-1/2}&=\sum_{k:s_{i-1/2}<0}\xi_{k,i-1/2},\\ \boldsymbol{A}^+\Delta\boldsymbol{U}_{i-1/2}&=\sum_{k:s_{i-1/2}>0}\xi_{k,i-1/2},\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

در رابطهٔ بالا عبارت $\xi_{k,i-1/2}$، شار موج k ام در سطح مشترک $i-1/2$ می‌باشد که با سرعت موج $s_{i-1/2}$ منتشر می‌گردد و از ضرب یک ضریب مانند $\beta_{k,i-1/2}$ در مقدار بردار ویژه $\boldsymbol{r}_{k,i-1/2}$ برای هر سطح مشترک سلول حجم محدود قابل‌محاسبه است.

$$\xi_{k,i-1/2}=\beta_{k,i-1/2}\boldsymbol{r}_{k,i-/2}, \qquad (۱۱)$$

لازم به ذکر است که مقدار سرعت موج $s_{i-1/2}$ برابر با مقادیر ویژهٔ ماتریس ژاکوبی ترم شار در معادلهٔ (۷) می‌باشد که برای سیستم موردنظر $\pm a$ به‌دست خواهد آمد. عبارات $\tilde{\boldsymbol{F}}_{i\pm1/2}^n$ در رابطهٔ فوق مرتبط با دقت مرتبه‌دوم هستند و می‌توانند به‌شکل زیر تعریف گردند.

$$\tilde{F}_{i-1/2}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{M_w}\left(I-\frac{\Delta t}{\Delta x}\left|s_{k,i-1/2}\right|\right)\xi_{k,i-1/2} \qquad (۱۲)$$

کـه در ایـن رابطـه $\xi_{k,i-1/2}$ شـار مـوج بـا اعمـال محدودکننده می‌باشد. برای روش پخش موج مـی‌تـوان از محدودکننـده‌هـای مختلفـی نظیـر van-Leer و superbee و MC اسـتفاده نمـود کـه جزئیـات نـوع محدودکننده در [5, 15] شرح داده شده است. اگـر در معادلهٔ بالا مقدار $\tilde{\boldsymbol{F}}^n_{i\pm1/2}=0$ باشد الگوریتم پخش مـوج مرتبه‌اول گودونوف به‌دست می‌آید.

روش شار موج برای حل معادلات ضربه‌قوچ در شکل بقایی

روش شار موج در ابتدا برای حـل معـادلات دینامیـک گازها توسط بیل و همکاران [16] معرفی گردیـد. ایـن روش بعدها توسط مهدیزاده و همکاران [12, 13] برای حل معادلات آب‌های کم‌عمق با قابلیت پخش بـرروی سطح خشک تغییر داده شد [12, 13] که در ایـن مقالـه از این روش برای حـل معـادلات ضـربه‌قـوچ اسـتفاده خواهـد گردیـد. در حالـت کلـی از روش شـار بـرای محاسـبهٔ مـوج‌هـای راسـت‌رونـده و چـپ‌رونـده در الگـوریتم پخـش مـوج مطـابق معادلـهٔ (۱۰) مـی‌تـوان استفاده نمود. روش شار موج می‌تواند در حالـت کلـی به‌صورت زیر بیان گردد.

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_i)-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_{i-1})-\boldsymbol{S}_{i-1/2}\Delta x=\sum_{k=1}^{M_w}\xi_{k,i-1/2}, \qquad (۱۳)$$

در رابطهٔ فوق $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_i)$ و $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}_{i-1})$ بردارهـای شـار در سمت چپ و راست سطح مشـترک $i-1/2$ بـرای دو سلول مجاور مـی‌باشـند و M_w نشـان‌دهنـدهٔ تعـداد موج‌ها برای روش شار موج است که این تعـداد بـرای معادلات ضربه‌قوچ برابر با ۲ اسـت. روش شـار مـوج برای معادلات ضـربه‌قـوچ در شـکل بقـایی مـی‌تواننـد به‌صورت زیر توسعه پیدا کند.

$$\begin{bmatrix} a^2/g(u_i-u_{i-1}) \\ g(H_i-H_{i-1}) \end{bmatrix} - \Delta x \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{\rho r_1}\dfrac{\partial(r_i\tau_{rx})}{\partial r_i} \end{bmatrix} = \beta_{1,i-1/2}\begin{bmatrix} 1 \\ -g/a \end{bmatrix} + \beta_{2,i-1/2}\begin{bmatrix} 1 \\ g/a \end{bmatrix}, \qquad (۱۴)$$

که از رابطهٔ مذکور ضرایب $\beta_{1,i-1/2}$ و $\beta_{2,i-1/2}$ مـی‌تواننـد به‌شکل زیر محاسبه گردند.

$$\beta_{1,i-1/2}=\frac{c\Gamma_2-\Gamma_1}{2c}, \quad \beta_{2,i-1/2}=\frac{\Gamma_1+c\Gamma_2}{2c}. \qquad (۱۵)$$

که در اینجا،

$$\Gamma_1=a^2/g(u_i-u_{i-1}), \quad \Gamma_2=g(H_i-H_{i-1})-\Delta x\frac{1}{\rho r_1}\frac{\partial(r_i\tau_{rx})}{\partial r_i}. \qquad (۱۶)$$

و مقدار $c=g/a$ می‌باشد.

بـا محاسـبهٔ مقـدارهای $\beta_{1,i-1/2}$ و $\beta_{2,i-1/2}$ از طریـق حل سیستم (۱۵) می‌تـوان مـوج‌هـای شـار $\xi_{k,i-1/2}$ را محاسـبه نمـود کـه نهایتـاً مـوج‌هـای راسـت‌رونـده و چـپ‌رونـده $\boldsymbol{A}^{\pm}\Delta\boldsymbol{U}_{i-1/2}$ کـه بـرای محاسـبهٔ بـردار مجهـولات بـرای زمـان بعـدی در روش پخـش مـوج گودونوف موردنیاز هستند به‌دست خواهند آمد.

روش بالدوین- لوماکس برای محاسبهٔ لزجت گردابه‌ای

مدل بالدوین- لوماکس [17] یک مدل آشفته دولایـه‌ای می‌باشد که در آن لزجت گردابـه‌ای بایـد در هـر لایـه به‌طـور مجـزا محاسـبه گـردد. مقـدار ν_t در هـر لایـه بـه‌ترتیـب ν_{ti} و ν_{to} مـی‌باشـد کـه در اینجـا ν_{ti} لزجـت گردابه‌ای در لایهٔ داخلی و ν_{to} لزجت گردابه‌ای در لایهٔ

خارجی می‌باشد که اساس انتخاب آن بـه شـرایط زیـر بستگی دارد.

$$\nu_t = \begin{cases} \nu_{ti} & y \le y_m \\ \nu_{to} & y > y_m \end{cases} \qquad (۱۷)$$

در معادلهٔ فوق $y_m\,(m)$ کوچک‌ترین ارتفاع $y\,(m)$ یعنی ارتفاع از جدار لوله تا مرکز است که در آن ارتفاع $\nu_{ti} = \nu_{to}$ مـی‌باشـد. مقـدارهـای ν_{ti} و ν_{to} مـی‌توانـد براساس روابط ذکرشده در ذیل محاسبه گردد.

$$\begin{aligned} &\nu_{ti} = l_{\text{mix}}^2 \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| \\ &l_{mix} = ky\left|1 - e^{-y^+/26}\right| \\ &\nu_{to} = \beta C_{cp} F_{wake} F_{Kleb}(y; y_{\max} / C_{Kleb}) \\ &F_{wake} = \min(y_{\max} F_{\max}; C_{cw} y_{\max} U_{dif}^2 / F_{\max}) \\ &F_{\max} = \frac{1}{k}\left[\max_y\left(l_{mix}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\right)\right] \end{aligned} \qquad (۱۸)$$

کـه در معادلـهٔ بـالا $y_{\max}\,(m)$ مقـداری از ارتفـاع y می‌باشـد کـه در آن ارتفـاع عبـارت $l_{mix}\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$ بیشـترین مقدار خود را دارا است. U_{dif} بیـانگر بیشـترین مقـدار پروفایل سرعت و F_{Kleb} تـابع کلبـانوف (Klebanoff) می‌باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$F_{Kleb}(y;\delta) = \left[1 + 5.5\left(\frac{C_{Kleb}\, y}{y_{\max}}\right)^6\right]^{-1} \qquad (۱۹)$$

و مقـــادیر $k = 0.4$ $C_{cp} = 1.6$, $\beta = 0.0168$ و $C_{wk} = 1.0$ و $C_{Kleb} = 0.3$ به‌عنـوان ضـرایب ثابـت در روش بالـدوین- لومـاکس اسـتفاده مـی‌گردنـد. بـرای محاسـبهٔ لزجـت گردابـه‌ای در حالـت آشـفته بـرای معادلات ضربه‌قـوچ لازم اسـت کـه پروفایـل سـرعت جریان آشفته در حالت پایدار به‌عنوان شرط اولیه بـرای محاسبات ضربه‌قوچ اعمال گـردد کـه بـرای ایـن کـار می‌توان از معادلهٔ زیر که از حل تحلیلی جریـان آشـفته در لوله‌ها به‌دست می‌آید، استفاده نمود.

$$(\nu + \nu_t)\frac{\partial u}{\partial r} = u_\tau^2\left(1 - \frac{y}{R}\right) \qquad (۲۰)$$

که در رابطـهٔ بـالا $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$ سـرعت اصـطکاکی (m/s) می‌باشد. معادلهٔ (۲۰) را می‌توان با انتگرال‌گیـری یا با روش تفاضل محدود به‌سهولت حل نمود و مقدار سرعت آشفته در حالت پایدار را به‌دست آورد. لازم به ذکر است که در روش بالدوین–لومـاکس بایـد از یـک حدس اولیه بـرای u_τ اسـتفاده گـردد کـه ایـن مقـدار می‌تواند از رابطهٔ پرنتل (Prandtl) برای لوله‌های صـاف محاسبه شود.

$$u_\tau = \sqrt{fV^2 / 8} \qquad (۲۱)$$

که برای محاسبهٔ ضریب اصطکاک در اینجا می‌توان از رابطهٔ کلبروک–وایت برای لوله‌های صاف به‌شکل زیر استفاده نمود.

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2\log(\text{Re}\sqrt{f}) - 0.8 \qquad (۲۲)$$

نکتهٔ دیگری که درمورد محاسبهٔ پروفایـل جریـان آشفته در حالت پایدار باید به آن اشاره نمود این اسـت که مقدار $y_{\max}$ در ابتدا یک مقدار نامشخص است کـه بـه کـل بـردار سـرعت بسـتگی دارد. لـذا در روش بالدوین- لوماکس در ابتدا از یـک حـدس اولیـه بـرای بردار سرعت استفاده می‌شود که ایـن حـدس اولیـه در قالب یک فرایند تکراری در داخل روش مذکور مادامی که شرط زیر برقرار گردد تصحیح می‌گردد.

$$\left\|\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n\right\|_2 \le 10^{-6} \qquad (۲۳)$$

که در رابطهٔ فوق $\|\cdot\|_2$ نرم اقلیدسی و u^n و u^{n+1} به‌ترتیب بردارهای سرعت در تکرارهای n و $n+1$ می‌باشند.

پایداری مدل و شرایط مرزی برای معادلات ضربه‌قوچ در حالت دوبعدی

برای ایجاد پدیدهٔ ضربه‌قوچ به‌عنوان شرایط مرزی لازم است که یک هد ثابت در تمام زمان‌ها در مرز بالادست برای محاسبهٔ فشار داده شود. این در حالی است که در مدل دوبعدی جریان گذار در لوله‌ها سرعت از معادلهٔ اندازهٔ حرکت در هر مقطع از لوله به‌دست می‌آید. در مرز پایین‌دست درست قبل از شیر سرعت در تمامی مقاطع باید در مقدار صفر نگه داشته شود. شایان ذکر است که برای ایجاد پایداری برای الگوریتم پخش موج معرفی‌شده لازم است هر گام زمانی مطابق شرط زیر تعیین گردد.

$$Cr = |a\Delta t / \Delta s| \leq 1 \qquad (۲٤)$$

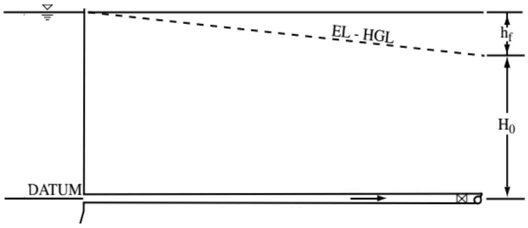
در رابطهٔ بالا Cr عدد کورانت می‌باشد که در این مقاله برای مسائل حل‌شده از اعداد کورانت نزدیک به یک استفاده گردیده است. در واقع اعمال اعداد کورانت نسبتاً نزدیک به ۱ در اینجا از مزایای اصلی روش پخش موج معرفی‌شده نسبت به مدل‌های مشابه دوبعدی است که زمان پردازش را برای مسائل گذار بسیار تسریع می‌نماید.

نتایج عددی

برای بررسی قابلیت روش دوبعدی معرفی‌شده برای مدل‌سازی مسائل ضربه‌قوچ در این قسمت به بیان چند مثال عددی پرداخته می‌شود. در ابتدا روش موردنظر برای یک لوله متصل به مخزن در حالت یک‌بعدی حل می‌شود و نتایج حاصل با حل دقیق در حالت بدون اصطکاک مقایسه می‌گردد. درادامه مدل دوبعدی با عبارات اصطکاک آشفته بالدوین - لوماکس برای یک لوله با اعداد رینولدز مختلف ۵٦۰۰ و ۱۵۸۰۰ اجرا می‌شود و نتایج آن با نتایج آزمایشگاهی مقایسه می‌گردد. لازم به ذکر است که برای به‌دست آودن دقت مرتبه‌دوم مکانی در تمامی مسائل حل‌شده از محدودکنندهٔ MC استفاده گردیده است. تعداد گره و عدد کورانت برای هر مسئله به نوبهٔ خود ذکر می‌گردد.

حل عددی مسئلهٔ ضربه‌قوچ برای لولهٔ متصل به مخزن در حالت یک‌بعدی بدون اصطکاک

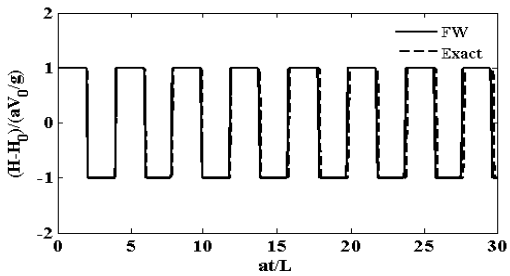
در اولین مثال حل‌شده در اینجا مدل عددی معرفی‌شده برای مدل‌سازی پدیدهٔ ضربه‌قوچ برای یک لوله متصل به مخزن که به‌صورت شکل (۱) می‌باشد در حالت یک‌بعدی و بدون اصطکاک به‌کار می‌رود.



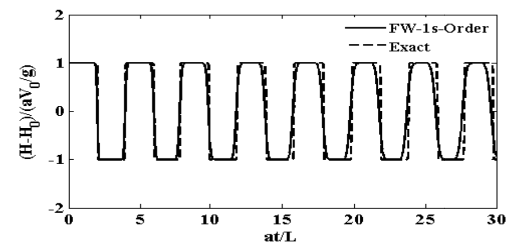
شکل ۱ لولهٔ متصل به مخزن برای مدل‌سازی پدیدهٔ ضربه‌قوچ در حالت یک‌بعدی [10]

همان‌طور که در شکل نیز مشاهده می‌گردد لولهٔ موردنظر به‌طول ۲٤٤ متر و قطر ۰/٦ متر است که به یک مخزن به ارتفاع هد ٦۰۹ متر متصل می‌باشد که آب با سرعت متوسط ۰/۰٦(m/s) در آن در جریان می‌باشد [8]. همچنین این لوله شامل یک شیر در انتها است که در زمان صفر بسته می‌شود و باعث ایجاد سرعت موج $a = 1219\, m/s$ در آن می‌گردد. مقادیر لزجت سینماتیکی و زبری لوله برای مسئلهٔ درنظر گرفته‌شده به‌ترتیب $\nu = 1.31\times10^{-6} m^2/s$ و $\varepsilon = 0.0005\, m$ می‌باشند. شکل (۲) نوسانات

به‌دست آمده برای هد فشار را بااستفاده‌از روش شار موج معرفی شده بادقت مرتبه‌دوم و در محل شیر برای زمان ٦۰ ثانیه نشان می‌دهد. همان‌طور که در اینجا دیده می‌شود مدل حجم محدود معرفی‌شده در حالت بدون اصطکاک کاملاً بر حل تحلیلی منطبق می‌باشد که حاکی از دقت بالای این مدل است. در شکل (۳) نتایج عددی حل مدل با دقت مرتبه‌اول با حل دقیق مقایسه می‌گردد که نشان از پخش‌شدگی جواب‌ها نسبت به روش مرتبه‌دوم به‌خصوص در بالای موج‌های ایستا (shock waves) است.

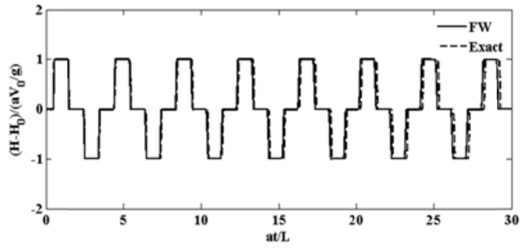


شکل ۲ مقایسهٔ منحنی تغییرات فشار در محل شیر بااستفاده‌از روش شار موج مرتبه‌دوم و درحالت بدون اصطکاک با حل دقیق

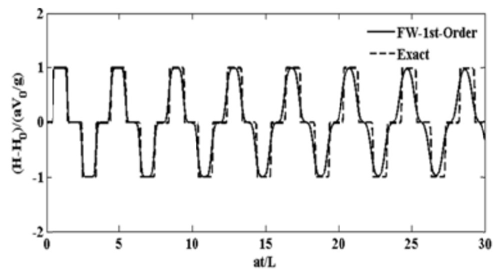


شکل ۳ مقایسهٔ منحنی تغییرات فشار در محل شیر بااستفاده‌از روش شار موج مرتبه‌اول و درحالت بدون اصطکاک با حل دقیق

شکل‌های (٤ و ٥) نتایج حاصل از حل مدل یک‌بعدی را برای مثال فوق به‌ترتیب با دقت مرتبه‌اول و دوم برای هد فشار در مرکز لوله نشان می‌دهد. همان‌طور که در اینجا نیز مشاهده می‌گردد شبیه‌سازی عددی با دقت مرتبه‌دوم دوباره بر حل دقیق منطبق می‌گردد درحالی‌که مرتبه‌اول حالت پخش‌شدگی بیشتری را نسبت به نتایج برروی شیر از خود نشان می‌دهد. لازم به ذکر است که برای کلیهٔ نتایج ارائه‌شده در اینجا تعداد سلول‌های محاسباتی برابر با صد عدد و مقدار عدد کورانت $Cr = 0.8$ می‌باشد.



شکل ٤ مقایسهٔ منحنی تغییرات فشار در مرکز لوله بااستفاده‌از روش شار موج مرتبه‌دوم و درحالت بدون اصطکاک با حل دقیق



شکل ٥ منحنی تغییرات فشار در محل شیر بااستفاده‌از روش شار موج مرتبه‌اول و درحالت بدون اصطکاک با حل دقیق

مدل‌سازی جریان ضربه قوچ در حالت دوبعدی و مقایسه با داده‌های آزمایشگاهی

در این قسمت به مقایسهٔ مدل عددی معرفی‌شده با داده‌های آزمایشگاهی و لحاظ کردن ترم‌های اصطکاک ناپایدار پرداخته می‌گردد. برای این منظور در اینجا از داده‌های آزمایشگاهی به‌دست آمده در مراجع [18, 19] استفاده گردیده است که خلاصهٔ شرایط اولیهٔ آن در جدول (۱) آورده شده است.

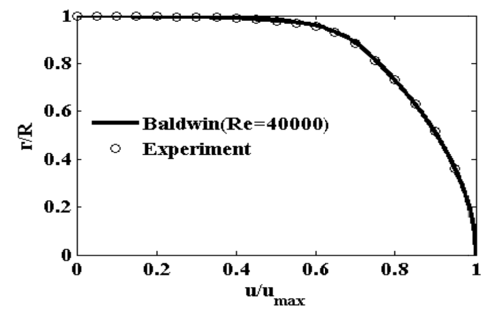
جدول ۱ پارامترهای مختلف برای آزمایش‌های ضربه‌قوچ

عدد رینولدز	لزجت سینماتیکی m^2/s	سرعت m/s	سرعت موج	طول لوله m	قطر لوله mm	نوع آزمایش
5600	1.184×10^{-06}	0.3032	1319	37/2	22.1	الف
15800	9.5×10^{-7}	0.9411	1297	37/2	16	ب

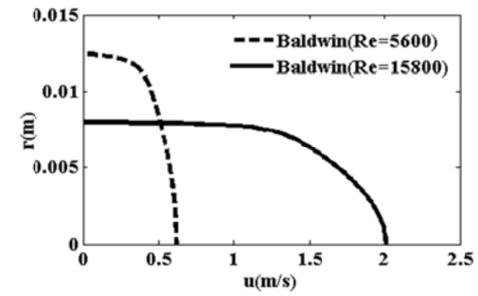
همان‌گونه که قبلاً ذکر گردید برای مدل‌سازی دوبعدی جریان گذار در لوله‌ها باید سرعت اولیه در حالت پایدار توسط مدل آشفته بالدوین- لوماکس ایجاد گردد. برای بررسی صحت مدل بالدوین- لوماکس ارائه‌شده مقادیر سرعت در حالت پایدار در ابتدا با مقادیر آزمایشگاهی که در مرجع [20] برای عدد رینولدز Re=۴۰۰۰۰ محاسبه شده است در شکل (٦) مقایسه می‌گردد.

همان‌طور که در این شکل نمایان است مدل بالدوین-لوماکس مطابقت بسیار خوبی را با داده‌های آزمایشگاهی برای اعداد رینولدز بالا نشان می‌دهد. در شکل (۷) پروفایل‌های سرعت‌های اولیه که توسط روش بالدوین- لوماکس به‌دست آمده‌اند برای دو عدد رینولدز ٥٦٠٠ و ١٥٨٠٠ برای تعداد گره ۸۰ عدد درجهت عمود بر محور لوله و ۲۰۰ سلول درجهت افقی نشان داده شده است. به‌طوری‌که قبلاً نیز بیان گردید این سرعت‌ها باید در زمان صفر به‌عنوان شرایط اولیه برای روش شار موج استفاده گردند.

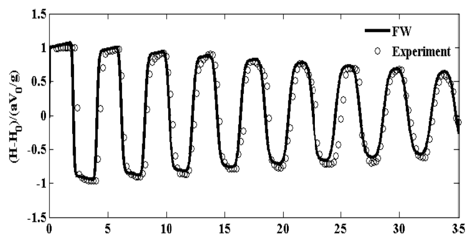
پس از محاسبهٔ سرعت اولیه مدل عددی شار موج معرفی‌شده برای یک شبکهٔ ۲۰۰×۸۰ با عدد کورانت $Cr=0.9$ اجرا می‌گردد که در اینجا ۲۰۰ تعداد سلول‌ها درجهت محور لوله و ۸۰ تعداد گره درجهت عمود بر محور می‌باشند. شکل (۸) نتایج حاصل مدل عددی با دقت مرتبه‌دوم را که از حل دوبعدی روش شار موج با ترم‌های اصطکاکی حاصل از روش بالدوین-لوماکس به‌دست آمده است، برای آزمایش الف و نوسانات فشار در محل شیر نشان می‌دهد. مقایسهٔ روش عددی و داده‌های آزمایشگاهی بیانگر این مطلب است که مدل عددی تطابق بسیار خوبی با داده‌های آزمایشگاهی نشان می‌دهد که نشان‌دهندهٔ دقت مدل دوبعدی و همچنین محاسبهٔ نسبتاً واقعی ترم‌های اصطکاکی توسط روش بالدوین-لوماکس می‌باشد.



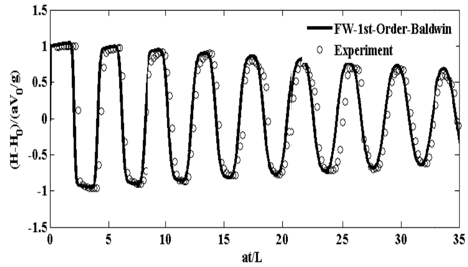
شکل ٦ مقایسه نتایج مدل بالدوین-لوماکس و داده‌های آزمایشگاهی برای عدد $Re=40000$



شکل ۷ پروفایل‌های سرعت اولیه برای اعداد رینولدز نشان داده شده در جدول ۱ که توسط روش بالدوین- لوماکس به‌دست آمده‌اند.

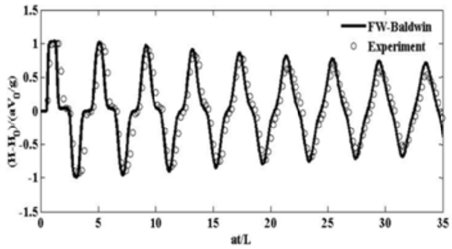


شکل ۸ مقایسهٔ منحنی تغییرات فشار در محل شیر بااستفاده‌از روش شار موج مرتبه‌دوم و مدل بالدوین-لوماکس برای عدد رینولدز ٥٦٠٠ با حل دقیق

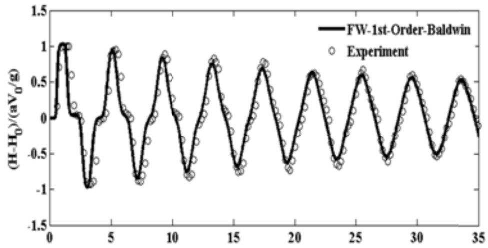


شکل ۹ مقایسهٔ منحنی تغییرات فشار در محل شیر بااستفاده‌از روش شار موج مرتبه‌اول و مدل بالدوین-لوماکس برای عدد رینولدز ۶۰۰ و مقایسه با نتایج آزمایشگاهی

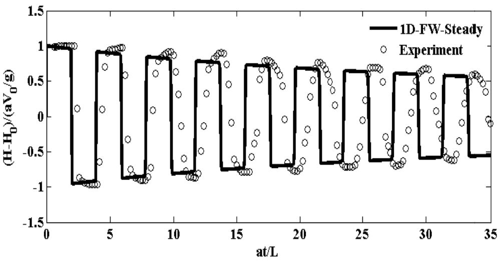
در شکل (۹) نتایج حاصل از حل مدل دوبعدی در حالت مرتبه اول با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده است و همان‌طور که انتظار می‌رود دارای پخش‌شدگی بیشتری نسبت به مدل مرتبه‌دوم می‌باشد. شکل‌های (۱۰ و ۱۱) نتایج عددی مدل شار موج دوبعدی را به‌ترتیب با دقت‌های مرتبه‌دوم و اول برای نوسانات فشار در مرکز لوله و برای آزمایش الف (جدول ۱) نمایش می‌دهند. همان‌طور که در اینجا نیز دیده می‌شود مدل عددی شار موج با عبارات آشفته بالدوین-لوماکس بر نتایج آزمایشگاهی منطبق می‌باشد. در شکل‌های (۱۲ و ۱۳) مقایسهٔ نتایج عددی مدل معرفی‌شده با ترم‌های اصطکاک پایدار در حالت یک‌بعدی با نتایج آزمایشگاهی برای آزمایش الف به‌ترتیب برای نوسانات فشار برروی شیر و در مرکز لوله با دقت مرتبه‌دوم نمایش داده شده است. نتایج به‌دست آمده بیانگر این واقعیت می‌باشند که مدل یک‌بعدی شامل ترم‌های اصطکاک پایدار به‌هیچ‌وجه قادر به تخمین موج‌های ایستا برای جریان آشفته نمی‌باشد و جواب‌های غیرفیزیکی را از خود بروز می‌دهد.



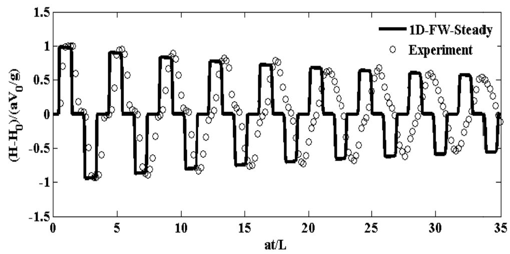
شکل ۱۰ منحنی تغییرات فشار در مرکز لوله بااستفاده‌از روش شار موج مرتبه‌دوم و مدل بالدوین-لوماکس برای عدد رینولدز ۵۶۰۰ و مقایسه با نتایج آزمایشگاهی



شکل ۱۱ منحنی تغییرات فشار در مرکز لوله بااستفاده‌از روش شار موج مرتبه‌اول و مدل بالدوین-لوماکس برای عدد رینولدز ۵۶۰۰ و مقایسه با نتایج آزمایشگاهی

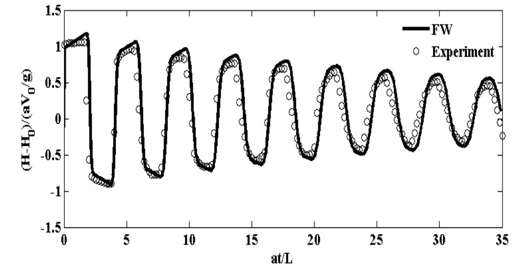


شکل ۱۲ منحنی تغییرات فشار در محل شیر بااستفاده‌از روش شار موج مرتبه‌دوم در حالت یک‌بعدی و ترم‌های اصطکاک پایدار برای عدد رینولدز ۵۶۰۰ و مقایسه با نتایج آزمایشگاهی

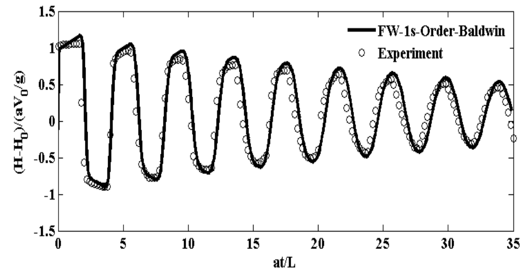


شکل ۱۳ منحنی تغییرات فشار در مرکز لوله بااستفاده‌از روش شار موج مرتبه‌دوم در حالت یک‌بعدی و ترم‌های اصطکاک پایدار برای عدد رینولدز ۵۶۰۰ و مقایسه با نتایج آزمایشگاهی

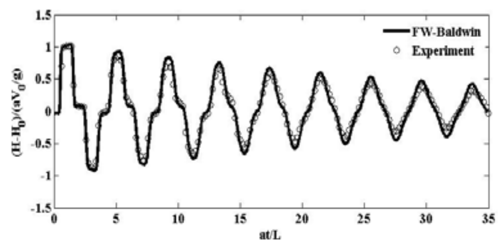
شکل‌های (۱٤ و ۱۵) نتایج مدل دوبعدی را با عبارات اصطکاک آشفتهٔ بالدوین-لوماکس برای آزمایش ب که شامل عدد رینولدز بالا (Re=15800) می‌باشد برای نوسانات هد فشار برروی شیر نمایش می‌دهند. همان‌طور که در اینجا نیز دیده می‌شود عبارات آشفتهٔ بالدوین- لوماکس پخش‌شدگی‌های بیشتری را به‌خصوص برای زمان‌های پایانی برای عبارات فشار نسبت به اعداد رینولدز پایین‌تر ایجاد می‌نمایند که مطابقت بسیار خوبی را نیز با داده‌های آزمایشگاهی دارا می‌باشند. علاوه‌بر این تفاوت مشاهده‌شده بین مدل مرتبه‌اول با دوم حذف عبارات مرتبه‌دوم ذکرشده در رابطهٔ (۱۲) از مدل پخش موج می‌باشد. لازم به ذکر است اکثر مدل‌های ارائه‌شدهٔ دوبعدی که برای حل معادلات ضربه‌قوچ به‌کار گرفته شده‌اند قادر به مدل‌سازی اعداد رینولدز بالا با اعداد کورانت نزدیک به یک نمی‌باشند [21] درحالی‌که الگوی عددی معرفی‌شده در اینجا قابلیت اجرای مسایل دوبعدی با مدل آشفتهٔ بالدوین - لوماکس را حتی برای عدد کورانت $Cr = 0.95$ بدون هیچ‌گونه ناپایداری عددی دارا می‌باشد. در شکل‌های (۱٦ و ۱۷) مقایسهٔ روش عددی معرفی‌شده با نتایج آزمایشگاهی ب مندرج در جدول (۱) برای نوسانات فشار و به‌ترتیب برای دقت‌های مرتبه‌دوم و اول در مرکز لوله ارائه گردیده است. دوباره در اینجا موج‌های ایستا در زمان‌های پایانی، پخش‌شدگی بسیار بیشتری را نسبت به اعداد رینولدز پایین‌تر در زمان‌های مشابه نشان می‌دهند (شکل‌های ۱۰ و ۱۱) که حاکی از تأثیر بیشتر عبارات آشفتهٔ بالدوین- لوماکس می‌باشد.



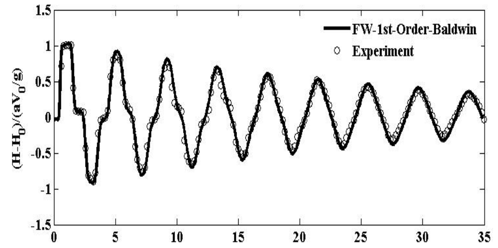
شکل ۱٤ منحنی تغییرات فشار در محل شیر بااستفاده‌از روش شار موج مرتبه‌دوم و مدل بالدوین- لوماکس برای عدد رینولدز ۱۵۸۰۰



شکل ۱۵ منحنی تغییرات فشار در محل شیر بااستفاده‌از روش شار موج مرتبه‌اول و مدل بالدوین- لوماکس برای عدد رینولدز ۱۵۸۰۰



شکل ۱٦ منحنی تغییرات فشار در مرکز لوله بااستفاده‌از روش شار موج مرتبه‌دوم و مدل بالدوین- لوماکس برای عدد رینولدز ۱۵۸۰۰

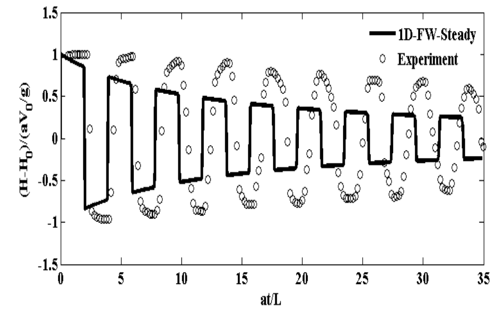


شکل ۱۷ منحنی تغییرات فشار در مرکز لوله بااستفاده‌از روش شار موج مرتبه‌اول و مدل بالدوین- لوماکس برای عدد رینولدز ۱۵۸۰۰

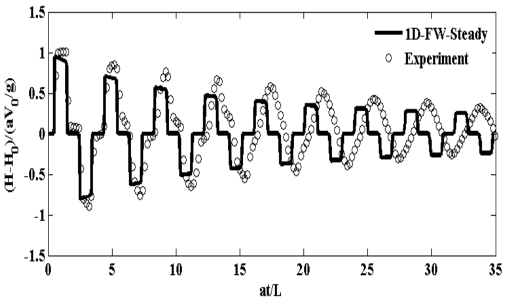
در شکل‌های (۱۸ و ۱۹) نتایج روش شار موج یک‌بعدی با عبارات اصطکاک پایدار که از معادلهٔ سوامی و جین (۳) به‌دست آمده، آورده شده است که دوباره حاکی از جواب‌های غیرصحیح مدل یک‌بعدی با ترم‌های اصطکاک پایدار برای مسایل جریان گذار در لوله‌ها به‌خصوص برای اعداد رینولدز بالا می‌باشد.

نتیجه‌گیری

در این تحقیق یک روش حجم محدود برای حل معادلات ضربه‌قوچ در حالت بقایی معرفی شده است. روش شار موج معرفی شده کاملاً متوازن شده است و قادر می‌باشد ترم‌های منبع را در داخل تفاوت شارها از دو سلول مجاور حجم محدود قرار دهد. برای اعمال عبارات جریان آشفته در اینجا برای مسائل دوبعدی از روش بالدوین- لوماکس استفاده گردیده است. نهایتاً روش عددی معرفی‌شده با عبارات جریان آشفته برای دو عدد رینولدز مختلف Re=5600 و Re=15800 برای جریان در درون لوله با دو قطر و زبری مختلف اعمال شده و جواب‌های آن با نتایج آزمایشگاهی مقایسه گردیده است. نتایج عددی نشان می‌دهد که روش شار موج با عبارات جریان آشفته تطابق بسیار خوبی را با نتایج آزمایشگاهی به‌خصوص برای اعداد رینولدز بالا دارا می‌باشد. علاوه‌بر این اضافه شدن دقت مرتبه‌دوم به الگوی بخش موج باعث مطابقت نسبتاً بهتری با حل تحلیلی و همچنین نتایج آزمایشگاهی می‌گردد. از دیگر مزایای روش شار موج معرفی‌شده به‌کارگیری اعداد کورانت نزدیک به یک می‌باشد که سرعت روش فوق را ازلحاظ سرعت پردازنده نسبت به روش‌های دوبعدی بسیار افزایش می‌دهد.



شکل ۱۸ منحنی تغییرات فشار در محل شیر بااستفاده‌از روش شار موج مرتبه‌دوم در حالت یک‌بعدی و ترم‌های اصطکاک پایدار برای عدد رینولدز ۱۵۸۰۰



شکل ۱۹ منحنی تغییرات فشار در مرکز لوله بااستفاده‌از روش شار موج مرتبه‌دوم در حالت یک‌بعدی و ترم‌های اصطکاک پایدار برای عدد رینولدز ۱۵۸۰۰

مراجع

1. Ghidaoui, M.S., Zhao, M., McInnis, D.A. and Axworthy, D.H., "A Review of Water Hammer Theory and Practice", *Applied Mechanics Reviews*, Vol. 58(1), pp. 49-76, (2005).
2. Samani, H.M.V. and Khayatzadeh, A., "Transient flow in pipe networks", *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 40(5), pp. 637-644, (2002).
3. Chaudhry, M.H. and Hussaini, M.Y., "Second-Order Accurate Explicit Finite-Difference Schemes for Waterhammer Analysis", *Journal of Fluids Engineering*, Vol. 107(4), pp. 523-529, (1985)

4. Godunov, S.K., "A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics", *Matematicheskii Sbornik*, Vol. 47, pp. 271-306, (1959).
5. LeVeque, R.J., "*Finite volume methods for hyperbolic problems*", Cambridge University Press, (2002).
6. Toro, E.F., "*Shock capturing methods for free surface shallow flows*", United Kingdom: John Wiley & Sons, (2001).
7. Toro, E.F., "*Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*", Tokyo: Springer, (1997).
8. Hwang, Y.-H. and Chung, N.-M., "A fast Godunov method for the water-hammer problem", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 40(6), pp. 799-819, (2002).
9. Zhao, M. and Ghidaoui, M.S., "Investigation of turbulence behavior in pipe transient using a k–∊model", *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 44(5), pp. 682-692, (2006).
10. Riasi, A., Nourbakhsh, A. and Raisee, M., "Unsteady turbulent pipe flow due to water hammer using k–θ turbulence model", *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 47(4), pp. 429-437, (2009).
11. Wahba, E.M., "Runge–Kutta time-stepping schemes with TVD central differencing for the water hammer equations", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 52(5), pp. 571-590, (2006).
12. Mahdizadeh, H., Stansby, P.K. and Rogers, B.D., "On the approximation of local efflux/influx bed discharge in the shallow water equations based on a wave propagation algorithm", *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 66, pp. 1295-1314, (2011).
13. Mahdizadeh, H., Stansby, P. and Rogers, B., "Flood Wave Modeling Based on a Two-Dimensional Modified Wave Propagation Algorithm Coupled to a Full-Pipe Network Solver", *Journal of Hydraulic Engineering*, Vol. 138(3), pp. 247-259, (2011).
14. Swamee, P.K. and Jain, A.K., "Explicit equations for pipe-flow problems", *J. Hydraul. Div.*, Vol. 102(5), pp. 657-664, (1976).
15. LeVeque, R.J., "Balancing source terms and flux gradients in high-resolution Godunov methods: The quasi-steady wave-propagation algorithm", *Journal of Computational Physics*, Vol. 146(1), pp. 346-365, (1998).
16. Bale, D.S., Leveque, R.J., Mitran, S. and Rossmanith, J.A., "A wave propagation method for conservation laws and balance laws with spatially varying flux functions", *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 24(3), pp. 955-978, (2002).
17. Baldwin, B. and Lomax, H., "Thin-layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows", *AIAA paper*, pp. 78-257, (1978).
18. Bergant, A., Vítkovsky, J., Simpson, A. and Lambert, M., "Valve induced transients influenced by unsteady pipe flow friction", in *Proc of the 10th int meeting of the work group on the behaviour of hydraulic machinery under steady oscillatory conditions*, (2001).
19. Marcinkiewicz, J., Adamowski, A. and Lewandowski, M., "Experimental evaluation of ability of Relap5, Drako®, Flowmaster2™ and program using unsteady wall friction model to calculate water hammer loadings on pipelines", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 238(8), pp. 2084-2093, (2008).
20. "Some Recent Measurements in a Two-Dimensional Turbulent Channel", *Journal of the Aeronautical Sciences*, Vol. 17(5), pp. 277-287, (1950).

21. Wahba, E.M., "Turbulence modeling for two-dimensional water hammer simulations in the low Reynolds number range", *Computers & Fluids*, Vol. 38(9), pp. 1763-1770, (2009).